

SPLAYNLAR VA ULARNING MATEMATIK ASOSLARI

Behruz Ulug'bek o'g'li Quvvatov

Osiyo Xalqaro Universiteti

"Umumtexnik fanlar" kafedrası o'qituvchisi

ulughbekovich.bekhruz@mail.ru

Kalit so'zlar: Splaynlar, matematik asoslar, lineer splaynlar, kvadratik splaynlar, kubik splaynlar, b-splaynlar, nurbs, kompyuter grafikasi, interpolatsiya, geometriya, animatsiya, statistika, kinematika, polinomlar, matematik modellashuv, kompyuter dizayni, mashinani o'rganish, shakllar tasvirlash, robototexnika, sanoat dizayni

Kirish

Matematika fani o'zining keng va boy tarkibi bilan insoniyatga ko'plab yangi bilimlar va yechimlar taqdim etgan. Bu fanning turli sohalarida splaynlar (spline) deb ataladigan matematik ob'ektlar muhim o'rin tutadi. Splaynlar, asosan, nurni tasvirlash va egri chiziqlarni yengil va aniq tarzda ifodalash maqsadida ishlatiladi. Ushbu maqolada splaynlarning tarixi, ularning matematik asoslari, turlari va amaliy qo'llanilishi haqida batafsil ma'lumot beriladi.

Splaynlar tarixi

Splaynlar, dastlab o'zgaruvchi egri chiziqlarni birlashtirish va tasvirlash uchun matematik model sifatida paydo bo'ldi. Ularning nomi ingliz tilidagi *spline* so'zidan olingan bo'lib, bu so'z dastlab yog'ochdan ishlangan moslama yoki chiziqni anglatgan. Splaynlarning rivojlanishi 20-asrning ikkinchi yarmida dasturiy ta'minot va kompyuter texnologiyalarining tezkor rivojlanishi bilan tezlashdi. Splaynlar juda keng qo'llaniladigan metodlar bo'lib, ular kompyuter grafikasi, kinematika, animatsiya va statistikada ishlatiladi.

Splaynlarning matematik asoslari

Splaynlarning matematik asoslari ko'plab turli yo'nalishlarni o'z ichiga oladi. Ular asosan egri chiziqlarning va funksiyalarning tasvirlanishiga, ularning soddalashtirilishiga va noziklikka qaratilgan. Quyida splaynlarning eng mashhur turlarining matematik asoslari haqida ma'lumot beriladi.

1. Lineer splaynlar

Lineer splaynlar – bu eng oddiy va eng asosiy turdagi splaynlardir. Ular ikki nuqta orasidagi chiziqli interpolatsiya orqali hosil qilinadigan splaynlar bo'lib, har bir segmentda splaynning qiymatini hisoblash uchun chiziq (line) ishlatiladi. Boshqacha aytganda, lineer splaynlar, har bir segmentni to'g'ri chiziq bilan bog'lab tasvirlaydi.

Lineer splaynlarning matematik tavsifi

Lineer splaynlar uchun har bir segmentga mos keluvchi polinomning darajasi 1 bo'ladi, ya'ni har bir segmentda splayn to'g'ri chiziq sifatida ifodalanadi. Agar bizda n nuqtalar mavjud bo'lsa, unda har bir nuqtani bog'lash uchun $n-1$ ta lineer splayn kerak bo'ladi.

Har bir splayn segmenti quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$S_i(x) = a_i + b_i$$

Bu yerda:

- $S_i(x)$ — i -segmentdagi splayn funksiyasi;
- a_i va b_i — mos ravishda splaynning gradienti va boshlang'ich qiymatini aniqlovchi koeffitsiyentlar;
- x — x o'qi bo'yicha kiritilgan qiymat.

Lineer splaynlar yordamida nuqtalarni birlashtirishda, har bir segment uchun ikki nuqta orasidagi chiziqli interpolatsiya amalga oshiriladi. Ya'ni, agar (x_1, y_1) va (x_2, y_2) nuqtalari berilgan bo'lsa, bu nuqtalar orasidagi splayn quyidagicha bo'ladi:

$$S(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Bu formula orqali biz x_1 va x_2 nuqtalari orasidagi splaynni topishimiz mumkin.

Lineer splaynlarning xususiyatlari

- **Oddiylik:** Lineer splaynlar eng oddiy splaynlar bo'lib, faqat to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi.
- **Chiziqli interpolatsiya:** Ular nuqtalar orasidagi chiziqli interpolatsiyani ta'minlaydi. Ya'ni, har bir segmentda splayn chiziq sifatida tasvirlanadi.
- **Uzluksizlik:** Lineer splaynlar har bir segmentning boshlanishi va tugashida uzluksiz bo'ladi, ammo ularning hosilalari (yoki egri chiziqlari) nuqta nuqtada o'zgarishi mumkin.
- **Oddiy qo'llanilish:** Ular asosan yengil va oddiy masalalarda qo'llaniladi, masalan, dastlabki splayn tahlillari yoki soddalashtirilgan interpolatsiya masalalarida.

Lineer splaynlarning afzalliklari

- **Tez hisoblash:** Lineer splaynlar boshqa splaynlarga qaraganda hisoblash jarayoni ancha soddadir. Bu ularni tez va samarali ishlashga imkon beradi.
- **Oddiy tuzilma:** Ular oddiy va tushunarli bo'lib, ishlashda kam resurs talab qiladi.

Lineer splaynlarning kamchiliklari

- **Noziklik yo'qligi:** Lineer splaynlar nuqtalar orasidagi egri chiziqlarni silliq va aniq tasvirlash imkonini bermaydi. Ular faqat to'g'ri chiziqlarni ifodalaydi, bu esa ko'proq murakkab shakllar va animatsiyalar uchun kamdan-kam hollarda mos keladi.
- **Xatoliklar:** Agar nuqtalar orasidagi masofa katta bo'lsa, lineer splaynlar yuqori xatoliklarga olib kelishi mumkin, chunki ular faqat chiziqlar orqali yaqinlashishadi, egri chiziqlarni esa hisobga olmaydi.

2. Kvadratik splaynlar

Kvadratik splaynlar — bu splaynlarning turidir, ularning har bir segmenti kvadratik polinom yordamida tasvirlanadi. Kvadratik splaynlar lineer splaynlardan farqli o'laroq, faqat to'g'ri chiziqlarni emas, balki parabolik egri chiziqlarni ifodalaydi, bu esa ularni murakkabroq va aniqroq qilib qo'yadi. Kvadratik splaynlar, odatda, ko'proq nuqtalarni interpolatsiya qilish va silliq egri chiziqlarni yaratish uchun ishlatiladi.

Kvadratik splaynlarning matematik tavsifi

Kvadratik splaynlarning har bir segmenti kvadratik polinom orqali ifodalanadi. Ya'ni, har bir segmentda splaynning tenglamasi quyidagicha bo'ladi:

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

Bu yerda:

- $S_i(x)$ — i -segmentdagi splayn funksiyasi;
- a_i, b_i, c_i — splaynning koeffitsiyentlari (bu koeffitsiyentlar segmentdagi nuqtalar va hosilalar yordamida aniqlanadi);
- x — splayn bo'yicha kiritilgan qiymat.

Kvadratik splaynlar, har bir segment uchun uchta parametr (koeffitsiyent)ni talab qiladi: a_i, b_i va c_i . Bu koeffitsiyentlar, masalan, qo'shni nuqtalar va ularning hosilalari yordamida aniqlanadi.

Kvadratik splaynlarning xususiyatlari

- **Parabolik tasvirlash:** Kvadratik splaynlar har bir segmentni parabolik shaklda tasvirlaydi, bu esa ularni tekis va silliq egri chiziqlarni yaratishda foydali qiladi.

- **To'liq polinom tasvirlash:** Kvadratik splaynlar har bir segmentni ikkinchi darajali polinom yordamida tasvirlaydi, bu ularni ko'proq murakkab shakllarni ifodalash uchun imkoniyat yaratadi.

- **Uzluksizlik:** Kvadratik splaynlar uzluksiz bo'lishi kerak, ya'ni har bir segmentni birlashtirgan nuqtalarda funktsiyaning qiymati uzluksiz bo'ladi. Biroq, ular hosilalari (yani, egri chiziqlari) nuqtalarda uzluksiz bo'lishini ta'minlamaydi. Bu xususiyat, lineer splaynlarga qaraganda yaxshiroq, lekin kubik splaynlar bilan solishtirganda kamroq silliqlikni ta'minlaydi.

Kvadratik splaynlarning afzalliklari

- **Oddiylik:** Kvadratik splaynlar hisoblashda nisbatan oddiy, chunki ular faqat uchta koeffitsiyentni talab qiladi.

- **Parabolik shakl:** Ular parabolik egri chiziqlarni tasvirlashda yaxshi ishlaydi, bu esa ularni ba'zi muammolarni hal qilishda foydali qiladi.

- **Yuqori aniqlik:** Lineer splaynlarga qaraganda kvadratik splaynlar ancha yuqori aniqlikni ta'minlaydi, chunki ular to'g'ri chiziqlardan tashqari egri chiziqlarni ham silliq tasvirlaydi.

Kvadratik splaynlarning kamchiliklari

- **Uzluksizlik masalalari:** Kvadratik splaynlar nuqtalarda uzluksizlikni ta'minlashda mukammal emas. Ularning hosilalari uzluksiz emas, bu esa ba'zi vaziyatlarda splaynning to'liq silliq bo'lishini xohlagan foydalanuvchilar uchun kamchilik bo'lishi mumkin.

- **Chegaraviy shartlar:** Kvadratik splaynlar uchun chegaraviy shartlar (masalan, birinchi hosilalar uzluksizligini ta'minlash) talab qilinadi, bu esa ba'zi murakkab holatlarda qo'shimcha hisoblashlar va yechimlarni talab qiladi.

Kvadratik splaynlar va interpolatsiya

Kvadratik splaynlar ko'pincha interpolatsiya vazifalarida ishlatiladi, ya'ni ular o'zaro yaqin bo'lgan nuqtalar orqali egri chiziqni o'tkazish uchun ishlatiladi. Agar bizda nnn ta nuqta bo'lsa, unda kvadratik splaynlar yordamida har bir nuqta o'rtasida egri chiziq tasvirlanadi. Har bir segmentda splayn quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$S_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

Bu formulada a_i , b_i va c_i koeffitsiyentlari, nuqtalar va ularning hosilalari yordamida aniqlanadi. Buning uchun splaynlarning yuqori darajalari va chegaraviy shartlarni hisobga olish kerak.

Kvadratik splaynlar va amaliy qo'llanish

Kvadratik splaynlar quyidagi sohalarida qo'llaniladi:

- **Kompyuter grafikasi:** Ular silliq va aniq egri chiziqlarni yaratishda, model va animatsiyalarni ishlab chiqishda ishlatiladi.

- **Mashinani o'rganish:** Kvadratik splaynlar, turli xil harakatni model qilishda va masofani silliq ravishda hisoblashda foydalidir.

- **Yuzani interpolatsiya qilish:** Yuzaning silliq va aniq modellarini yaratish uchun kvadratik splaynlar ishlatiladi.

3. Kubik splaynlar

Kubik splaynlar eng ko'p qo'llaniladigan va mukammal natijalar beruvchi splaynlardir. Ular har bir segment uchun kubik polinomni ishlatadi. Kubik splaynlarning asosiy xususiyatlari quyidagilardan iborat:

- Splaynning har bir segmenti kubik polinom yordamida tasvirlanadi.

- Har bir nuqtada splaynni birlashtirishda uning birinchi va ikkinchi hosilalari uzluksiz bo'lishi ta'minlanadi.

- Kubik splaynlar, odatda, kompyuter grafikasi va animatsiya sohalarida keng qo'llaniladi, chunki ular tekis va silliq egri chiziqlarni ta'minlaydi.

4. B-splaynlar (B-spline)

B-splaynlar, ya'ni Basis spline (asosli splaynlar), juda keng tarqalgan va murakkab splayn turidir. Ular kubik splaynlardan farqli o'laroq, bir nechta segmentlarni bog'lashda uzoq muddatli sillqlikni ta'minlash uchun nozik nazoratni taklif etadi. B-splaynlar yordamida egri chiziqlarni aniq, lekin soddalashtirilgan shaklda tasvirlash mumkin. B-splaynlar ko'pincha xususiy nuqtalar to'plamiga asoslangan holda tasvirlanadi.

5. NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines)

NURBS splaynlari eng ilg'or va moslashuvchan splaynlar turlaridan biridir. Ular noaniq (non-uniform) va ratsional (rational) polinomlar orqali ifodalangan bo'lib, geometrik shakllar va tekisliklar orasida aniq bog'lanishni ta'minlaydi. NURBS splaynlari avtomobil sanoati, aerokosmik sanoat va kompyuter grafikasi sohalarida keng qo'llaniladi.

Splaynlarning amaliy qo'llanilishi

Splaynlar, matematik va kompyuter sohalarida ko'plab amaliy qo'llanmalarga ega. Ular quyidagi sohalarida keng tarqalgan:

- **Kompyuter grafikasi:** Splaynlar egri chiziqlarni yaratish va modellashtirishda, shuningdek, animatsiyalarni ishlab chiqishda keng qo'llaniladi.
- **Kinematika:** Harakatni sillqlik va aniq tasvirlash uchun splaynlardan foydalaniladi, masalan, robototexnika va mexanizmlar dizaynida.
- **Geometriya va kompyuter dizayni:** NURBS kabi splaynlar murakkab shakllar va obyektarni tasvirlashda qo'llaniladi.
- **Statistika va interpolatsiya:** Splaynlar, statistik ma'lumotlar to'plami asosida egri chiziqlarni interpolatsiya qilish uchun ishlatiladi.
- **Mashinani o'rganish:** Splaynlar, mashinalarning harakatini va ularning o'zaro bog'lanishini o'rganishda ham qo'llanilishi mumkin.

Xulosa

Splaynlar matematikaning eng qiziqarli va amaliy jihatlaridan birini tashkil etadi. Ularning matematik asoslari keng ko'lamli ilovalar va sohalarida qo'llanilishi mumkin. Splaynlar yordamida nafaqat matematik, balki real dunyodagi ko'plab masalalarni ham hal etish mumkin, jumladan, grafik dizayn, animatsiya, sanoat modellashtirish va boshqa sohalarida. Splaynlarning turli turlari, masalan, kubik splaynlar, B-splaynlar va NURBS, o'zlarining murakkabligi va moslashuvchanligi bilan ilmiy tadqiqotlar va amaliy ishlar uchun katta ahamiyatga ega.

Lineer splaynlar, oddiy va tez hisoblash imkoniyatiga ega bo'lsa-da, aniq va sillqlik egri chiziqlarni tasvirlash uchun mos emas. Ular asosan oddiy interpolatsiya vazifalarida, shuningdek, dastlabki tahlillar yoki soddalashtirilgan modellar yaratishda qo'llaniladi. Agar yuqori aniqlik talab qilinsa, boshqa splayn turlari, masalan, kubik yoki B-splaynlar ko'proq afzal ko'riladi.

Kvadratik splaynlar, o'zining parabolik xususiyatlari bilan murakkab shakllarni ifodalashda samarali vosita hisoblanadi. Ular lineer splaynlarga qaraganda yuqori aniqlikni ta'minlaydi, lekin hosilalar uzluksizligini ta'minlamaydi, bu esa ba'zi hollarda cheklolarga olib kelishi mumkin. Kvadratik splaynlar asosan sillqlik egri chiziqlar va interpolatsiya masalalarida qo'llaniladi.

FOYDALANGAN ADABIYOTLAR RO'YXATI

1. Quvvatov Behruz Ulug'bek o'g'li. (2024). FRAKSIONAL HISOBLASHDAGI EYLER INTEGRALLARI VA MITTAG-LEFFLER FUNKSIYASI. *IQRO INDEXING*, 12(01), 9-14.
2. Behruz Ulug'bek og, Quvvatov. "TECHNOLOGY AND MEDICINE: A DYNAMIC PARTNERSHIP." *International Multidisciplinary Journal for Research & Development* 10.11 (2023).

3. Behruz Ulugbek og, Quvvatov. "FUNDAMENTALS OF ALGORITHM AND PROGRAMMING IN MATHCAD SOFTWARE." *Multidisciplinary Journal of Science and Technology* 4.3 (2024): 410-418.
4. Behruz Ulugbek og, Quvvatov. "ADOBE PHOTOSHOP CC DASTURIDA ISHLASH." *PEDAGOG* 7.4 (2024): 390-396.
5. Quvvatov, B. U. (2024). ELEKTRON DARSLIK YARATUVCHI DASTURLAR XARAKTERISTIKALARI. *PEDAGOG*, 7(5), 292-301.
6. Behruz Ulugbek og, Q. (2024). INFORMATIKA FANINI O'QITISHDA INTERFAOL METODLARDAN FOYDALANISH. *PEDAGOG*, 7(6), 52-62.
7. Quvvatov, B. (2023). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. UMUMLASHGAN TRAPETSIYALAR QOIDASI. *Академические исследования в современной науке*, 3(7), 137-142.
8. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. GAUSS KVADRATUR FORMULALARI. *Models and methods in modern science*, 3(2), 114-125.
9. Behruz Ulug'bek o'g, Q. (2023). USE OF ARTIFICIAL NERVOUS SYSTEMS IN MODELING. *Multidisciplinary Journal of Science and Technology*, 3(5), 269-273.
10. Xamroyevna, M. B. (2024). TERMOYADRO SINTEZ REAKSIYALARINI BOSHQARISH MUAMMOSI. *Ensuring the integration of science and education on the basis of innovative technologies.*, 1(3), 62-68.
11. Xamroyevna, M. B. (2024). SUYUQ KRISTALLAR VA ULARNING XUSUSIYATLARI. *Modern digital technologies in education: problems and prospects*, 1(2), 32-38.
12. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. SIMPSON FORMULASI. *Models and methods in modern science*, 3(2), 223-228.
13. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. SIMPSON FORMULASI. *Models and methods in modern science*, 3(2), 223-228.
14. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. KLASSIK GAUSS KVADRATURALARI. *Инновационные исследования в науке*, 3(2), 94-103.
15. Quvvatov, B. (2024, February). TORTBURCHAK ELEMENT USTIDA GAUSS-LEJANDR FORMULASI. In *Международная конференция академических наук* (Vol. 3, No. 2, pp. 101-108).
16. Behruz Ulug'bek o'g, Q. li.(2023). Mobil ilovalar yaratish va ularni bajarish jarayoni. *International journal of scientific researchers*, 2(2).
17. Quvvatov, B. (2024, February). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. REKURSIV TRAPETSIYALAR QOIDASI. In *Международная конференция академических наук* (Vol. 3, No. 2, pp. 41-51).
18. Quvvatov, B. (2024). ALGEBRAIK ANIQLIGI YUQORI BOLGAN KVADRATUR FORMULALAR. ORTOGONAL KOPHADLAR. *Инновационные исследования в науке*, 3(2), 47-59.
19. Quvvatov, B. (2024). GLOBAL IN VIRTUAL LEARNING MOBILE APP CREATION INFORMATION SYSTEMS AND TECHNOLOGIES. *Science and innovation in the education system*, 3(1), 95-104.

20. Quvvatov, B. (2024). WEB FRONT-END AND BACK-END TECHNOLOGIES IN PROGRAMMING. *Theoretical aspects in the formation of pedagogical sciences*, 3(1), 208-215.
21. Quvvatov, B. (2024). FINDING SOLUTIONS OF SPECIAL MODELS BY INTEGRATING INTEGRAL EQUATIONS AND MODELS. *Current approaches and new research in modern sciences*, 3(1), 122-130.
22. Quvvatov, B. (2024). CONSTRUCTION OF SPECIAL MODELS THROUGH DIFFERENTIAL EQUATIONS AND PRACTICAL SOLUTIONS. *Solution of social problems in management and economy*, 3(1), 108-115.
23. Quvvatov, B. (2024). SQL DATABASES AND BIG DATA ANALYTICS: NAVIGATING THE DATA MANAGEMENT LANDSCAPE. *Development of pedagogical technologies in modern sciences*, 3(1), 117-124.